

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-001

Afleiding van een formule

voor

Dr. A. van Wijngaarden



Betreft: Afleiding van een formule
voor Dr. A. van Wijngaarden.

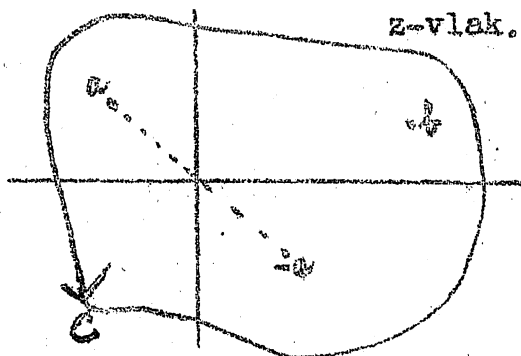
De volgende formule werd door van Wijngaarden geponceerd en door Korevaar bewezen:

$$a^{-p}b^{-p} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(p+j-1)!}{(p-1)! j!} (a^{-p+j} + b^{-p+j})(a+b)^{-p-j} \quad (1)$$

($p \geq 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$).

Bewijs. We integreren de functie

$$z\text{-vlak. } f(z) = \frac{1}{(a+z)^p (b-z)^p z} \quad (2)$$



over een contour C, die eenmaal in positieve zin om de punten 0, -a en b loopt.

Aangezien $f(z) = O(|z|^{-2p-1})$ ($|z| \rightarrow \infty$) moet $\oint_C f(z) dz = 0$.

Aan de andere kant is deze integraal gelijk aan $2\pi i$ (de som der residuen van $f(z)$ in de punten $z = 0$, $z = -a$ en $z = b$).

residu in $z = 0$: $a^{-p}b^{-p}$. (3)

residu in $z = -a$: coëff. van $\frac{1}{z+a}$ in de ontwikkeling van $f(z)$ naar $(z+a)$

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+a)^{-p} \left\{ b+a-(z+a) \right\}^{-p} (z+a-a)^{-1} \\ &= (z+a)^{-p} (b+a)^{-p} \left\{ 1 - \frac{z+a}{b+a} \right\}^{-p} (-a^{-1}) \left(1 - \frac{z+a}{b+a} \right)^{-1} \\ &= (z+a)^{-p} (b+a)^{-p} (-a^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{p}{j} \left(\frac{z+a}{b+a} \right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+a}{b+a} \right)^k \end{aligned}$$

coëfficiënt van $\frac{1}{z+a}$:

$$\sum_{j+k=p-1} (b+a)^{-p} (-a)^{-1} (-1)^j \binom{p}{j} (b+a)^{-j} a^{-k} \quad (4)$$

$$= (b+a)^{-p} (-a)^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} (b+a)^{-j} a^{-(p-1-j)}$$

Wanneer in (4) a wordt vervangen door $-b$, b door $-a$ (daardoor verandert $f(z)$ niet):

$$= (-b+a)^{-p} (-(-a))^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} (-b+a)^{-j} (-a)^{-(p-1-j)} \quad (5)$$

Invulling van (3), (4) en (5) geeft 0 opgeteld. Hieruit volgt het gevraagde resultaat (1).

F. Korevaar.